Journal of Algebra 321 (2009) 1039–1048

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra

Une démonstration simple de la fidélité de la représentation de Lawrence–Krammer–Paris

Jean-Yves Hée

LAMFA (CNRS UMR 6140), Université de Picardie Jules Verne, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex 1, France

ARTICLE INFO

Article history:
Reçu le 8 août 2008
Disponible sur Internet le 1er novembre 2008
Communiqué par Michel Broué

Mots-clés :
Monoïdes et groupes d'Artin–Tits
Homomorphismes initialement injectifs
Théorèmes de linéarité et d'injectivité

Keywords:
Artin–Tits monoids and groups
Initially injective homomorphisms
Theorems of linearity and of injectivity

ABSTRACT

Le théorème de linéarité des groupes d'Artin–Tits de type sphérique et le théorème d'injectivité de tout monoïde d'Artin–Tits dans son groupe reposent essentiellement sur la fidélité de la représentation de Lawrence–Krammer–Paris restreinte au monoïde. Nous démontrons cette fidélité sans utiliser les formes normales des éléments du monoïde ni les parties fermées du système de racines associé à la matrice de Coxeter en jeu ; nous n'employons que des notions très élémentaires.

The theorem of linearity of the Artin–Tits groups of spherical type and the theorem of injectivity of any Artin–Tits monoid in its group are essentially based on the faithfulness of the Lawrence–Krammer–Paris representation restricted to the monoid. We prove this faithfulness using neither the normal forms of the elements of the monoid nor the closed subsets of the associated root system; only very elementary notions are needed.

1. Introduction

Les groupes d'Artin–Tits de type sphérique, c'est-à-dire ceux qui sont associés à un groupe de Coxeter fini, sont linéaires. Ce *théorème de linéarité* a d'abord été démontré pour le type A_3, autrement dit pour le groupe des tresses à quatre brins, par D. Krammer [K1], puis pour tous les types A_n par S. Bigelow par une méthode topologique [Bi] et par D. Krammer par une méthode algébrique [K2]. Il a ensuite été étendu à tous les autres types sphériques par A. Cohen et D. Wales [CW] et indépendamment par F. Digne [Di].

Adresse e-mail : jean-yves.hee@u-picardie.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2008.09.021

Peu de temps après, L. Paris a montré que tous les monoïdes d'Artin–Tits s'injectent dans leurs groupes [P]. Ce *théorème d'injectivité* avait été démontré antérieurement pour le type A_n par F. Garside [G] et généralisé à tous les types sphériques par E. Brieskorn et K. Saito [BS] et indépendamment par P. Deligne [De] ; une démonstration simple dans le cas sphérique se trouve aussi dans l'article [Mi] de J. Michel. Quelques cas non sphériques avaient également été traités, voir l'introduction de [P].

Les démonstrations de ces deux théorèmes reposent sur l'existence de la représentation dite de Lawrence–Krammer (nous adoptons ici la dénomination introduite par S. Bigelow dans [Bi] en référence aux travaux de R.J. Lawrence [L] et de D. Krammer [K1]) et de ses généralisations construites dans [CW], [Di] et [P]. Plus précisément, les deux théorèmes résultent d'une propriété essentielle de ces représentations, la fidélité de leurs restrictions aux monoïdes d'Artin–Tits.

Nous donnons de cette fidélité une démonstration très simple qui n'utilise que des outils élémentaires, tel le monoïde des relations binaires sur un ensemble.

Les paragraphes 2 et 3 rassemblent des généralités sur le monoïde d'Artin–Tits B^+ associé à une matrice de Coxeter Γ, sur le monoïde $\mathrm{Bin}(\Omega)$ des relations binaires sur un ensemble Ω et sur les homomorphismes de monoïdes de B^+ dans $\mathrm{Bin}(\Omega)$. On y introduit la notion d'homomorphisme initialement injectif et on établit deux propositions (1 et 2) qui sont cruciales pour la suite : on les utilise aux numéros (4.3) et (4.4) et dans la section 5.3.

Au paragraphe 4, nous rappelons la définition de la représentation linéaire de B^+ construite par L. Paris [P] dans le cas où Γ est « à liaisons simples et sans triangle » ; nous la notons ρ et l'appelons représentation de Lawrence–Krammer–Paris. Puis nous démontrons que ρ est fidèle en appliquant la proposition 1 et un corollaire de la proposition 2.

Le paragraphe 5 est consacré à quelques compléments. En particulier, nous rappelons comment la fidélité de ρ entraîne les théorèmes de linéarité et d'injectivité évoqués au début de la présente introduction. D'autre part, nous proposons une généralisation de la méthode développée aux paragraphes 2 et 3 à tout monoïde qui, comme B^+, peut être défini par une présentation homogène. Enfin, nous indiquons brièvement comment les propositions 1 et 2 permettent de simplifier la démonstration de la fidélité des représentations linéaires définies par F. Digne dans [Di] ; cependant, pour ne pas alourdir notre texte, nous ne rappelons pas la construction de ces représentations, nous nous concentrons sur les relations binaires qui servent à en établir la fidélité.

2. Monoïdes d'Artin–Tits et homomorphismes initialement injectifs

(2.1) Dans ce n° (2.1), nous fixons des notations et une terminologie qui vont nous servir jusqu'à la section 5.1 incluse.

(a) Soit $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j\in I}$ une matrice de Coxeter.

(b) Soit M un monoïde multiplicatif dont l'élément neutre est noté 1.

Si x et y sont des éléments de M, on pose $(x, y; 0) = 1$ et, si n est un entier $\geqslant 1$, on note $(x, y; n)$ le produit $xyx\dots$ constitué de n termes alternativement égaux à x et à y, le premier étant égal à x.

(c) Nous disons qu'une famille $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I}$ d'éléments de M est *de type Γ dans M* si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I tels que $m_{i,j} \neq \infty$, on a $(x_i, x_j; m_{i,j}) = (x_j, x_i; m_{i,j})$.

(d) Nous notons respectivement $W = W(\Gamma)$, $B^+ = B^+(\Gamma)$ et $B = B(\Gamma)$ le groupe de Coxeter, le monoïde d'Artin–Tits et le groupe d'Artin–Tits associés à la matrice Γ, c'est-à-dire définis par les présentations suivantes

$$W = W(\Gamma) = \big\langle \mathbf{s} = (s_i)_{i\in I} \;\big|\; \mathbf{s} \text{ est de type } \Gamma \text{ et, pour tout } i \in I,\ s_i^2 = 1\big\rangle,$$

$$B^+ = B^+(\Gamma) = \big\langle \mathbf{b} = (b_i)_{i\in I} \;\big|\; \mathbf{b} \text{ est de type } \Gamma\big\rangle_{\mathrm{mon}},$$

$$B = B(\Gamma) = \big\langle \sigma = (\sigma_i)_{i\in I} \;\big|\; \sigma \text{ est de type } \Gamma\big\rangle_{\mathrm{gr}}.$$

(e) Nous disons que la matrice de Coxeter Γ est *finie* (resp. *sphérique*) si l'ensemble I (resp. le groupe W) est fini.

(f) Nous désignons par $\iota = \iota(\Gamma) : B^+ \to B$ l'homomorphisme de monoïdes qui, pour tout $i \in I$, envoie b_i sur σ_i. L'injectivité de ι est le théorème de L. Paris cité plus haut [P] ; nous revenons sur sa démonstration dans la section 5.1 ci-dessous.

(g) Nous notons l la fonction longueur sur B^+ relativement à la famille génératrice $(b_i)_{i\in I}$.

Si a et b appartiennent à B^+, nous écrivons $a \prec b$ pour exprimer qu'il existe un élément c de B^+ tel que $b = ac$.

Pour tout élément b de B^+, nous posons $I(b) = \{i \in I \mid b_i \prec b\}$.

Les ensembles $I(b)$ et les assertions (a) et (b) du n° (2.2) ci-dessous vont jouer un rôle déterminant dans la démonstration de fidélité du n° (4.4).

(2.2) Soit $\rho : B^+ \to M$ un homomorphisme de monoïdes. Nous disons que ρ est *initialement injectif* si, pour tout couple (b, b') d'éléments de B^+ tels que $\rho(b) = \rho(b')$, on a $I(b) = I(b')$.

Soient P un ensemble et $\tau : B^+ \to P^P$ un homomorphisme de monoïdes, la loi du monoïde P^P étant la composition des applications. Pour tout élément b de B^+, notons $\tau_b : P \to P$ l'image de b par τ. Soit p un élément de P. Nous disons que p est *initialement injectif pour* τ si, pour tout couple (b, b') d'éléments de B^+ tels que $\tau_b(p) = \tau_{b'}(p)$, on a $I(b) = I(b')$.

De ces définitions, on déduit aussitôt les assertions (a) et (b) ci-dessous.

(a) *Si $\varphi : M \to M'$ est un homomorphisme de monoïdes et si l'homomorphisme composé $\rho' = \varphi \circ \rho$ est initialement injectif, il en est de même de ρ.*

(b) *Si P possède un élément p initialement injectif pour τ, l'homomorphisme τ est initialement injectif.*

(2.3) La proposition fondamentale qui suit est essentiellement due à D. Krammer, voir [K1, Proposition 5.1] ou [K2, Proposition 2.1].

Proposition 1. *Supposons que* $\mathrm{Im}(\rho)$ *soit un sous-monoïde d'un groupe G. Si l'homomorphisme ρ est initialement injectif, il est injectif.*

Démonstration. Soient b, b' deux éléments de B^+ tels que $\rho(b) = \rho(b')$. Il s'agit de montrer que $b = b'$. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $n = l(b) + l(b')$. Si $n = 0$, on a $l(b) = l(b') = 0$, donc $b = b' = 1$. Supposons que $n > 0$. On a alors par exemple $b \neq 1$, donc il existe $i \in I(b)$. D'autre part, comme ρ est initialement injectif, l'égalité $\rho(b) = \rho(b')$ entraîne que $I(b) = I(b')$. On peut donc écrire $b = b_i c$ et $b' = b_i c'$, où $c, c' \in B^+$. De l'égalité $\rho(b) = \rho(b')$, on déduit $\rho(b_i)\rho(c) = \rho(b_i)\rho(c')$. Puisque G est un groupe, on peut simplifier par $\rho(b_i)$; on obtient $\rho(c) = \rho(c')$. Or $l(c) + l(c') = n - 2 < n$, donc $c = c'$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où immédiatement $b = b'$. □

3. Utilisation de relations binaires

(3.1) Soit Ω un ensemble. Nous rassemblons dans ce n° (3.1) quelques définitions concernant l'ensemble $\mathrm{Bin}(\Omega)$ des relations binaires sur Ω, c'est-à-dire l'ensemble des parties de $\Omega \times \Omega$.

(a) Si R et S appartiennent à $\mathrm{Bin}(\Omega)$, nous définissons le produit

$$RS = \left\{(x, z) \in \Omega \times \Omega \;\middle|\; \text{il existe } y \in \Omega \text{ tel que } xRy \text{ et } ySz\right\};$$

conformément à l'usage, nous écrivons xRy au lieu de $(x, y) \in R$.

Muni de cette multiplication, l'ensemble $\mathrm{Bin}(\Omega)$ est un monoïde dont l'élément neutre est la relation d'égalité.

(b) Nous associons à toute relation binaire $R \in \mathrm{Bin}(\Omega)$ sa matrice $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y\in\Omega} \in \mathcal{M}_\Omega(\{0, +\})$, définie par : $\alpha_{x,y} = + \Leftrightarrow xRy$. Par exemple, la matrice de la relation binaire $R = \emptyset$ est la matrice nulle $\alpha = (0)$.

Nous obtenons ainsi une bijection de $\mathrm{Bin}(\Omega)$ sur $\mathcal{M}_\Omega(\{0, +\})$, ce qui nous permet, par transport de structure, de munir $\mathcal{M}_\Omega(\{0, +\})$ d'une loi de monoïde que nous allons expliciter et qui peut être vue comme une multiplication ligne-colonne.

Définissons d'abord le produit de deux éléments de $\{0,+\}$: il est égal à 0 si l'un au moins des deux facteurs est nul, et à $+$ sinon. Définissons aussi la somme d'une famille, finie ou non, d'éléments de $\{0,+\}$: elle est égale à 0 si tous ses termes sont nuls, et à $+$ sinon.

Maintenant, dans le monoïde $\mathcal{M}_\Omega(\{0,+\})$, le produit $\alpha\beta$ de deux matrices $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y\in\Omega}$ et $\beta = (\beta_{x,y})_{x,y\in\Omega}$ est la matrice $\gamma = (\gamma_{x,y})_{x,y\in\Omega}$ définie par $\gamma_{x,y} = \sum_{z\in\Omega} \alpha_{x,z}\beta_{z,y}$ (quels que soient $x, y \in \Omega$).

Lorsque Ω est fini de cardinal m, cette multiplication dans $\mathcal{M}_\Omega(\{0,+\})$ est celle qui est définie dans $\mathcal{M}_m(\{0,1\})$ par D. Krammer [K2, p. 133].

(c) Nous notons $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et nous appelons homomorphisme canonique de $\mathrm{Bin}(\Omega)$ dans $\mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$ l'homomorphisme de monoïdes $\varphi : \mathrm{Bin}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$ qui, à tout élément R de $\mathrm{Bin}(\Omega)$, associe l'application $\varphi_R : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ définie par :

$$\varphi_R(Y) = \{x \in \Omega \mid \text{il existe } y \in Y \text{ tel que } xRy\}.$$

(d) Si $\mathcal{R} : B^+ \to \mathrm{Bin}(\Omega)$ est un homomorphisme de monoïdes, nous formons l'homomorphisme $\tau = \varphi \circ \mathcal{R} : B^+ \to \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$, où $\varphi : \mathrm{Bin}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$ est l'homomorphisme canonique défini en (c); pour tout élément b de B^+, nous convenons de noter R_b et τ_b les images respectives de b par $\mathcal{R}$ et par τ.

(3.2) Soit $D = (\Omega, \mathbf{R}, \mathbf{a})$ un triplet dans lequel Ω est un ensemble, $\mathbf{R} = (R_i)_{i\in I}$ est une famille de type Γ formée d'éléments de $\mathrm{Bin}(\Omega)$, et $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de Ω. Nous notons $\mathcal{R} : B^+ \to \mathrm{Bin}(\Omega)$ l'homomorphisme de monoïdes tel que, pour tout élément i de I, $\mathcal{R}(b_i) = R_i$, et nous adoptons les notations τ, R_b et τ_b (pour b appartenant à B^+) définies en (3.1)(d).

Proposition 2. *Supposons remplie la condition*

(C) *pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I et pour tout entier n tel que $1 \leqslant n < m_{i,j}$, si l'on pose $c = (b_j, b_i; n) = b_j b_i b_j \ldots b_{j'}$ et $\{i', j'\} = \{i, j\}$, on a $a_i R_c a_{i'}$.*

Alors, pour tout $b \in B^+$ et tout $i \in I$ tels que $b_i \not\prec b$, il existe $k \in I$ tel que $a_i R_b a_k$; en particulier, on a $a_i \in \tau_b(\Omega)$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $l(b)$.

Si $l(b) = 0$, la relation R_b est l'égalité, donc $a_i R_b a_i$.

Supposons que $l(b) \geqslant 1$. Il existe $j \in I$ tel que $b_j \prec b$. On a $i \neq j$. Notons n le plus grand entier tel que $(b_j, b_i; n) \prec b$; on a $n \geqslant 1$. Si l'on avait $n \geqslant m_{i,j}$, on aurait $m_{i,j} \neq \infty$ et $(b_i, b_j; m_{i,j}) = (b_j, b_i; m_{i,j}) \prec (b_j, b_i; n) \prec b$, d'où $b_i \prec b$, ce qui est exclu. On a donc $n < m_{i,j}$. Écrivons $c = (b_j, b_i; n) = b_j b_i b_j \ldots b_{j'}$ et $\{i', j'\} = \{i, j\}$. Il existe $b' \in B^+$ tel que $b = cb'$. La maximalité de n entraîne que $b_{i'} \not\prec b'$. Comme $l(b') = l(b) - n < l(b)$, l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $k \in I$ tel que $a_{i'} R_{b'} a_k$. Or, d'après (C), on a $a_i R_c a_{i'}$, donc $a_i R_b a_k$. $\square$

Corollaire. *Supposons remplies la condition* (C) *ci-dessus ainsi que la condition*

(C′) *pour tout élément i de I et tout couple (x, y) d'éléments de Ω tels que $xR_i y$, on a $x \neq a_i$.*

Alors,

(a) *pour tout $b \in B^+$, on a, pour tout $i \in I$, $a_i \in \tau_b(\Omega) \Leftrightarrow b_i \not\prec b$; autrement dit, $I(b) = \{i \in I \mid a_i \notin \tau_b(\Omega)\}$;*
(b) *l'homomorphisme $\mathcal{R} : B^+ \to \mathrm{Bin}(\Omega)$ est initialement injectif ; plus précisément, l'ensemble Ω est initialement injectif pour τ.*

Démonstration. (a) résulte de (C′) et de la proposition précédente.

(b) résulte immédiatement de (a) et de (2.2)(a) et (b). $\square$

4. Fidélité de la représentation de Lawrence–Krammer–Paris

(4.1) Dans tout le paragraphe 4, nous supposons que la matrice de Coxeter Γ est *à liaisons simples* (i.e., si i et j appartiennent à I, on a $m_{i,j} \leqslant 3$) et *sans triangle* (i.e., si i, j, k sont des éléments deux à deux distincts de I, l'un au moins des trois coefficients $m_{i,j}$, $m_{j,k}$, $m_{k,i}$ est égal à 2).

Sous ces hypothèses, Daan Krammer [K2], dans le cas particulier où Γ est de type A_n, et Luis Paris [P], dans le cas général, ont construit une remarquable représentation $\rho : B^+ \to \mathrm{GL}(E)$, où E est un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{Q}(X, Y)$ des fractions rationnelles à deux indéterminées sur $\mathbb{Q}$. Un résultat important de Krammer et de Paris est que la représentation ρ est fidèle. La représentation considérée par Krammer se trouve déjà dans [L] ; d'autre part, avant l'étude générale de Paris, le cas où Γ est de type D_n, E_6, E_7 ou E_8 avait été traité indépendamment dans [CW] et dans [Di].

Nous allons voir que la fidélité de ρ résulte très simplement du corollaire du n$^{\mathrm{o}}$ (3.2) ci-dessus.

(4.2) Rappelons la construction de ρ donnée par L. Paris dans [P].

Notons encore l la fonction longueur sur W par rapport à la famille génératrice $(s_i)_{i \in I}$ de W.

Soit $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ la base canonique du $\mathbb{Z}$-module $V = \mathbb{Z}^{(I)}$. Si i et j appartiennent à I, posons $A_{i,j} = 2$, 0 ou -1 selon que $m_{i,j} = 1$, 2 ou 3. On peut identifier le groupe de Coxeter W à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ au moyen de la représentation fidèle $W \to \mathrm{GL}(V)$ définie par : $s_i(a_j) = a_j - A_{i,j} a_i$ quels que soient i et j appartenant à I.

Considérons le système de racines $\Phi = \{w(a_i) \mid w \in W,\ i \in I\}$ et notons Φ^+ l'ensemble des éléments de Φ dont toutes les coordonnées dans la base $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ sont positives ou nulles. On sait que Φ est réunion disjointe des ensembles Φ^+ et $\Phi^- = -\Phi^+$. Pour toute racine a appartenant à Φ^+, on appelle *profondeur* de a l'entier $\mathrm{dp}(a) = \mathrm{Min}\{l(w) \mid w \in W,\ w(a) \in \Phi^-\}$, voir [BH, p. 181].

Posons $\Omega = \Phi^+$ et notons $(e_a)_{a \in \Omega}$ la base canonique du K-espace vectoriel $E = K^{(\Omega)}$.

Pour tout élément i de I, l'ensemble $\Phi^+ \setminus \{a_i\}$ est stable par s_i et toute orbite de cardinal 2 de $\Phi^+ \setminus \{a_i\}$ sous l'action de $\langle s_i \rangle$ est de la forme $\{a, a'\}$, où $\mathrm{dp}(a') = \mathrm{dp}(a) + 1$, voir [BH, Lemma 1.7]. On définit un endomorphisme φ_i du K-espace vectoriel E en posant

- $\varphi_i(e_{a_i}) = 0$,
- $\varphi_i(e_a) = e_a$, si $a \in \Phi^+$ et $s_i(a) = a$,
- $\varphi_i(e_a) = (1 - Y)e_a + e_{a'}$ et $\varphi_i(e_{a'}) = Y e_a$, si $a, a' \in \Phi^+$, $a' = s_i(a)$ et $\mathrm{dp}(a') = \mathrm{dp}(a) + 1$.

On vérifie que, dans le monoïde $\mathrm{End}(E)$ formé des endomorphismes du K-espace vectoriel E, la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ est de type Γ, voir [P, Proposition 3.1].

Ensuite, en utilisant le fait que la matrice de Coxeter Γ est sans triangle, on construit une famille particulière $(T(i, a))_{i \in I, a \in \Omega}$ de polynômes appartenant à $\mathbb{Z}[Y]$, voir [P, Theorem 3.2].

Pour tout élément i de I, on définit alors un endomorphisme ψ_i du K-espace vectoriel E en posant $\psi_i(e_a) = \varphi_i(e_a) + X\,T(i, a) e_{a_i}$.

Grâce aux particularités des polynômes $T(i, a)$ $(i \in I, a \in \Omega)$, on montre que la famille $(\psi_i)_{i \in I}$ est de type Γ dans le monoïde $\mathrm{End}(E)$, voir [P, Lemmas 3.6 and 3.7].

Enfin, on vérifie que, pour tout élément i de I, l'endomorphisme ψ_i appartient à $\mathrm{GL}(E)$, voir [P, Lemma 3.8].

Nous appelons *représentation de Lawrence–Krammer–Paris* l'homomorphisme de monoïdes $\rho : B^+ \to \mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout élément i de I, $\rho(b_i) = \psi_i$.

(4.3) Vu la proposition 1, pour montrer que l'homomorphisme ρ est injectif, il suffit de montrer qu'il est initialement injectif. Dans ce but, nous commençons par déduire de ρ un homomorphisme de monoïdes $\mathcal{R} : B^+ \to \mathrm{Bin}(\Omega)$.

Pour tout $b \in B^+$, notons $\mu(b)$ la matrice de $\rho(b)$ dans la base $(e_a)_{a \in \Omega}$ de E. Pour tout $i \in I$, la matrice $\mu(b_i)$ de ψ_i est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X, Y]$; il en est donc de même de $\mu(b)$ pour tout $b \in B^+$. On obtient ainsi un homomorphisme de monoïdes multiplicatifs $\mu : B^+ \to \mathcal{M}^f_\Omega(\mathbb{Z}[X, Y])$, où $\mathcal{M}^f_\Omega(\mathbb{Z}[X, Y])$ désigne l'anneau formé des matrices de type $\Omega \times \Omega$, à coefficients dans $\mathbb{Z}[X, Y]$ et dont chaque colonne ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Soient k un corps commutatif totalement ordonné et t un élément de k tel que $0 < t < 1$ (par exemple, $k = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ et $t = \frac{1}{2}$). L'homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[X, Y]$ dans k qui envoie X sur 0 et Y sur t induit un homomorphisme d'anneaux $\varepsilon : \mathcal{M}^f_\Omega(\mathbb{Z}[X, Y]) \to \mathcal{M}^f_\Omega(k)$. L'application composée $\varepsilon \circ \mu : B^+ \to \mathcal{M}^f_\Omega(k)$ est un homomorphisme de monoïdes. Pour tout $b \in B^+$, posons $\nu(b) = (\varepsilon \circ \mu)(b)$. Pour tout $i \in I$, les coefficients de la matrice $\nu(b_i)$ appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, t, 1 - t\}$ donc à l'ensemble k^+ des éléments $\geqslant 0$ de k. Il en résulte que, pour tout $b \in B^+$, les coefficients de la matrice $\nu(b)$ appartiennent aussi à k^+. On obtient donc un homomorphisme de monoïdes $\nu : B^+ \to \mathcal{M}^f_\Omega(k^+)$, où $\mathcal{M}^f_\Omega(k^+)$ désigne le sous-monoïde de $\mathcal{M}^f_\Omega(k)$ constitué des matrices à coefficients $\geqslant 0$.

Soit $\beta : \mathcal{M}^f_\Omega(k^+) \to \mathrm{Bin}(\Omega)$ l'application qui, à toute matrice $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y\in\Omega}$ de $\mathcal{M}^f_\Omega(k^+)$, associe la relation binaire dont la matrice $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_{x,y})_{x,y\in\Omega}$ est définie par : $\overline{\alpha}_{x,y} = + \Leftrightarrow \alpha_{x,y} > 0$. On vérifie que β est un homomorphisme de monoïdes ; noter que, dans le cas où Γ est de type A_{n-1}, l'homomorphisme β est essentiellement l'homomorphisme $B^+_n \to \mathcal{M}_m(\{0, 1\})$ considéré dans [K2, p. 133].

Considérons enfin l'homomorphisme $\mathcal{R} = \beta \circ \nu : B^+ \to \mathrm{Bin}(\Omega)$ et posons $\mathbf{R} = (R_i)_{i\in I}$, où, pour tout élément i de I, $R_i = R(b_i)$.

(4.4) **Proposition 3.** *L'homomorphisme $\mathcal{R} : B^+ \to \mathrm{Bin}(\Omega)$ est initialement injectif.*

Démonstration. D'après le corollaire à la proposition 2, il suffit de vérifier que le triplet $D = (\Omega = \Phi^+, \mathbf{R}, \mathbf{a})$ satisfait aux conditions (C) et (C′) du n° (3.2) ci-dessus. Or, un coup d'œil sur la définition de φ_i montre que la relation binaire R_i est la relation telle que, pour x et y appartenant à Φ^+,

$$xR_iy \quad \Leftrightarrow \quad \big(x = s_i(y)\big) \quad \text{ou} \quad \big(x = y \neq a_i \text{ et } \mathrm{dp}(x) < \mathrm{dp}\big(s_i(x)\big)\big).$$

On en déduit aussitôt la condition (C′).

D'autre part, puisque Γ est à liaisons simples, la condition (C) se réduit aux deux propriétés suivantes :

(a) si i et j sont des éléments distincts de I, on a $a_iR_ja_i$;
(b) si i et j sont des éléments de I tels que $m_{i,j} = 3$, on a $a_iR_jR_ia_j$.

On vérifie immédiatement (a) ; quant à la propriété (b), elle résulte des relations $a_iR_js_j(a_i)$, $s_j(a_i) = s_i(a_j)$ et $s_i(a_j)R_ia_j$. □

Conséquence. *La représentation de Lawrence–Krammer–Paris est fidèle.*

Démonstration. L'homomorphisme $\rho : B^+ \to \mathrm{GL}(E)$ est initialement injectif car, si $\rho(b) = \rho(b')$, où b et b' appartiennent à B^+, alors $\mu(b) = \mu(b')$ donc $\nu(b) = \nu(b')$ et enfin $R_b = R_{b'}$, d'où $I(b) = I(b')$ d'après la proposition 3.

Il résulte donc de la proposition 1 que la représentation ρ est fidèle. □

5. Compléments

5.1. Démonstration des théorèmes de linéarité et d'injectivité

(5.1.1) Rappelons les énoncés des théorèmes de linéarité et d'injectivité.

Théorème 1 *(Linéarité). Si Γ est sphérique, le groupe d'Artin–Tits B est linéaire : il existe un homomorphisme injectif $B \to \mathrm{GL}(N, K)$, où N est un entier naturel et K un corps commutatif convenables.*

Théorème 2 *(Injectivité). Le morphisme $\iota : B^+ \to B$ est injectif.*

Dans les trois numéros suivants, nous rappelons succinctement comment les théorèmes 1 et 2 se déduisent de la fidélité de la représentation de Lawrence–Krammer–Paris.

(5.1.2) **Lemme 1.** *Soient $\rho : B^+ \to G$ un morphisme de monoïdes de B^+ dans un groupe G et $\rho_{\mathrm{gr}} : B \to G$ le morphisme de groupes induit par ρ, c'est-à-dire tel que $\rho = \rho_{\mathrm{gr}} \circ \iota$. Supposons que ρ soit injectif. Alors,*

(a) *le morphisme $\iota : B^+ \to B$ est injectif ;*
(b) *si Γ est sphérique, le morphisme ρ_{gr} est injectif.*

Démonstration. L'assertion (a) est immédiate.

(b) L'injectivité de ι permet d'identifier tout élément b de B^+ à son image $\iota(b)$ dans B. Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(\rho_{\mathrm{gr}})$. Puisque Γ est sphérique, il existe des éléments b et b' de B^+ tels que $x = b'b^{-1}$, cf. par exemple [Mi], première assertion du corollaire 3.2. On a $xb = b'$, donc $\rho_{\mathrm{gr}}(x)\rho_{\mathrm{gr}}(b) = \rho_{\mathrm{gr}}(b')$, i.e. $\rho(b) = \rho(b')$. Comme ρ est injectif, on a donc $b = b'$, d'où $x = 1$, ce qui établit l'injectivité de ρ_{gr}. $\square$

Le lemme 2 ci-dessous se démontre aisément. Avant de l'énoncer, nous posons, pour toute partie J de I, $\Gamma_J = (m_{i,j})_{i,j\in J}$, $B_J^+ = B^+(\Gamma_J)$, $B_J = B(\Gamma_J)$ et $\iota_J = \iota(\Gamma_J)$.

Lemme 2. *Si le morphisme $\iota_J : B_J^+ \to B_J$ est injectif pour tout sous-ensemble fini J de I, il en est de même du morphisme $\iota : B^+ \to B$.*

(5.1.3) La proposition suivante a été démontrée par L. Paris (cf. [P, Theorem 5.1]) en utilisant notamment des notions développées par J. Crisp dans [Cr] ; pour une approche fondée sur les partitions admissibles définies par B. Mühlherr dans [Mü], voir la thèse d'Anatole Castella (cf. [Ca, section 8.3 et en particulier le corollaire 8.3.11]).

Proposition 4. *Si la matrice de Coxeter Γ est finie, il existe un morphisme de monoïdes injectif $B^+(\Gamma) \to B^+(\Gamma')$, où Γ' est une matrice de Coxeter finie, à liaisons simples, sans triangle et qui est sphérique si Γ l'est.*

(5.1.4) Maintenant, grâce aux lemmes 1 et 2 et à la proposition 4 ci-dessus, il est facile de vérifier que la fidélité de la représentation de Lawrence–Krammer–Paris (cf. (4.4)) entraîne les théorèmes 1 et 2.

5.2. Généralisation

(5.2.1) Au n° (5.2.2) ci-dessous, nous indiquons comment on peut généraliser aux monoïdes définis par une présentation homogène la proposition 1 du n° (2.3) et la proposition 2 du n° (3.2) avec son corollaire.

Fixons d'abord les notations.

Soient I un ensemble et Γ une partie de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I^n \times I^n)$.

Soient M un monoïde et $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$ et tout élément $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ de I^n, nous posons $x_{\mathbf{i}} = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$. Nous disons que la famille $\mathbf{x}$ est *de type Γ dans M* si, pour tout couple $\gamma = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ appartenant à Γ, on a $x_{\mathbf{i}} = x_{\mathbf{j}}$.

Nous notons $B^+ = B^+(\Gamma)$ le monoïde défini par la présentation

$$B^+ = B^+(\Gamma) = \left\langle \mathbf{b} = (b_i)_{i\in I} \,\middle|\, \mathbf{b} \text{ est de type } \Gamma \right\rangle.$$

Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I}$ est une famille de type Γ dans un monoïde M, il existe un unique morphisme de monoïdes $\rho = \rho_{\mathbf{x}} : B^+ \to M$ tel que, pour tout i appartenant à I, $\rho(b_i) = x_i$.

En particulier, il existe un unique morphisme de monoïdes $l : B^+ \to \mathbb{N}$ tel que, pour tout élément i de I, $l(b_i) = 1$. Ce morphisme l n'est autre que la fonction longueur sur B^+ relativement à la famille génératrice $(b_i)_{i\in I}$.

Si a et b appartiennent à B^+, nous écrivons $a \prec b$ pour exprimer qu'il existe un élément c de B^+ tel que $b = ac$.

Pour tout élément b de B^+, nous posons $I(b) = \{i \in I \mid b_i \prec b\}$.

(5.2.2) (a) On peut alors recopier mot pour mot les définitions et les énoncés (a) et (b) du n° (2.2) ci-dessus, la proposition 1 du n° (2.3) avec sa démonstration, et le n° (3.1)(d).

(b) On peut aussi recopier le n° (3.2) en entier à condition de remplacer la proposition 2 par la proposition 2* ci-dessous et d'écrire (C*) au lieu de (C) à la première ligne de l'énoncé du corollaire.

Proposition 2*. *Supposons remplie la condition*

(C*) *pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, il existe un élément m de $\mathbb{N}_{\geqslant 2} \cup \{\infty\}$ et un couple $\gamma = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ satisfaisant aux conditions suivantes*

- *si $m = \infty$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots)$ et $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots)$ sont deux suites infinies formées d'éléments de I,*
- *si $m \neq \infty$, $\gamma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}) = ((i_1, i_2, \ldots, i_m), (j_1, j_2, \ldots, j_m)) \in \Gamma$,*
- *$i = i_1$, $j = j_1$ et, pour $1 \leqslant n < m$, $a_i R_c a_{j_{n+1}}$, où $c = b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_n}$.*

Alors, pour tout $b \in B^+$ et tout $i \in I$ tels que $b_i \not\prec b$, il existe $k \in I$ tel que $a_i R_b a_k$; en particulier, on a $a_i \in \tau_b(\Omega)$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $l(b)$.

Si $l(b) = 0$, la relation R_b est l'égalité, donc $a_i R_b a_i$.

Supposons que $l(b) \geqslant 1$. Il existe $j \in I$ tel que $b_j \prec b$. On a $i \neq j$. Soient m et $\gamma = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ comme dans la condition (C*). Notons n le plus grand entier $\leqslant m$ tel que $b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_n} \prec b$; on a $n \geqslant 1$ car $j = j_1$. Si l'on avait $n = m$, on aurait $m \neq \infty$ et, puisque $i = i_1$, $b_i \prec b_{\mathbf{i}} = b_{\mathbf{j}} \prec b$, d'où $b_i \prec b$, ce qui est exclu. On a donc $n < m$. Il existe $b' \in B^+$ tel que $b = cb'$, où $c = b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_n}$. La maximalité de n entraîne que $b_{j_{n+1}} \not\prec b'$. Comme $l(b') = l(b) - n < l(b)$, l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $k \in I$ tel que $a_{j_{n+1}} R_{b'} a_k$. Or, d'après (C*), on a $a_i R_c a_{j_{n+1}}$, donc $a_i R_b a_k$. □

5.3. Fidélité des représentations de Digne

(5.3.1) Dans [Di], F. Digne définit certaines représentations linéaires des groupes d'Artin–Tits de type sphérique cristallographique et démontre qu'elles sont fidèles. Son raisonnement peut être simplifié en appliquant une méthode analogue à celle employée aux numéros (4.3) et (4.4) ci-dessus. Il est facile en effet de vérifier que les relations binaires en jeu dans les représentations construites par Digne sont celles que nous définissons au numéro suivant et qu'elles satisfont aux conditions (C) et (C′) de la proposition 2 et de son corollaire, voir (5.3.4) ci-dessous.

(5.3.2) *Définition des relations binaires de Digne.*

Soient Φ un système de racines réduit (au sens de Bourbaki [Bo]) dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, et $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ une base de Φ. Notons Φ^+ (resp. Φ^-) le système positif (resp. négatif) défini par la base $\mathbf{a}$. Pour tout élément i de I, désignons par r_i la réflexion de vecteur a_i qui conserve Φ. Soient $A = (A_{i,j})_{i,j \in I}$ la matrice de Cartan attachée à la base $\mathbf{a}$, et $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$ la matrice de Coxeter associée à la famille $(r_i)_{i \in I}$; si i et j appartiennent à I, on a $r_i(a_j) = a_j - A_{i,j} a_i$, et $m_{i,j}$ est l'ordre du produit $r_i r_j$ dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$. Nous adoptons les notations W, B^+, etc., de (2.1)(d).

Nous allons définir sur Φ^+ des relations binaires R_i $(i \in I)$, que nous appelons *relations de Digne* ; elles apparaissent en effet dans [Di, Proposition 3.4, condition (iii), p. 45].

Pour tout élément i de I, nous notons R_i la relation binaire sur Φ^+ définie ainsi : si x et y appartiennent à Φ^+, alors

$$x R_i y \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = r_i(y) - n a_i.$$

Remarques. (a) Cette relation R_i est symétrique ; en effet, comme $r_i(a_i) = -a_i$, on a : $x = r_i(y) - na_i \Leftrightarrow y = r_i(x) - na_i$.

(b) Soient i, j deux éléments distincts de I, et k un entier naturel *pair*. Si la relation $(R_i, R_j; k)$ est symétrique, alors $(R_i, R_j; k) = (R_j, R_i; k)$; cela résulte du fait que R_i et R_j sont symétriques.

(c) Soient x et y des éléments de Φ^+ tels que xR_iy. Nous allons voir que x et y sont distincts de a_i et qu'ils appartiennent à la même composante indécomposable de Φ ; plus précisément, si $x \neq y$, x et y appartiennent tous deux à la composante indécomposable de Φ qui contient a_i.

En effet, notons n l'entier naturel tel que $x = r_i(y) - na_i$.

D'une part, si y était égal à a_i, on aurait $x = -a_i - na_i = -(n+1)a_i$, ce qui est absurde puisque x appartient à Φ^+. On a donc $y \neq a_i$, et aussi $x \neq a_i$ en raison de la symétrie de R_i.

D'autre part, supposons par exemple que y appartienne à une composante indécomposable Ψ de Φ qui ne contient pas a_i. On a alors $r_i(y) = y$, donc $x = y - na_i$, ce qui, comme x appartient à Φ, montre que $n = 0$, d'où $x = y$.

(5.3.3) **Proposition 5.** *La famille* $\mathbf{R} = (R_i)_{i \in I}$ *est de type* Γ *dans le monoïde* $\mathrm{Bin}(\Phi^+)$.

Cet énoncé résulte du lien entre les relations R_i et les représentations de Digne (voir notamment dans [Di] le théorème 3.8, la proposition 3.4 et la première ligne de la démonstration de la proposition 3.6). On peut aussi démontrer cet énoncé directement à partir de la définition des relations R_i en se ramenant au cas où I est de cardinal $\leqslant 3$ et en effectuant alors, cas par cas, des vérifications matricielles élémentaires dans le monoïde $\mathcal{M}_\Omega(\{0, +\})$ (voir le n$^{\text{o}}$ (3.1)(b)).

(5.3.4) **Proposition 6.** *Le triplet* $D = (\Phi^+, \mathbf{R}, \mathbf{a})$ *satisfait aux conditions* (C) *et* (C′) *du* n$^{\text{o}}$ (3.2).

Démonstration. La condition (C′) résulte de la remarque (c) du n$^{\text{o}}$ (5.3.2).

D'autre part, rappelons l'énoncé de la condition (C) : *pour tout couple* (i, j) *d'éléments distincts de* I *et pour tout entier* n *tel que* $1 \leqslant n < m_{i,j}$, *si l'on pose* $c = (b_j, b_i; n) = b_jb_ib_j \dots b_{j'}$ *et* $\{i', j'\} = \{i, j\}$, *on a* $a_iR_ca_{i'}$.

Démontrons maintenant cette propriété.

Si $n = 1$, alors $i' = i$ et on a bien $a_iR_ja_i$ puisque $a_i = r_j(a_i) - (-A_{j,i})a_j$ et que $-A_{j,i}$ appartient à $\mathbb{N}$. Supposons désormais que $n \geqslant 2$.

Si $m_{i,j} = 3$, on a $r_j(a_i) = a_i + a_j = r_i(a_j)$, ce qui entraîne que $a_iR_j(a_i + a_j)R_ia_j$, d'où $a_i(R_jR_i)a_j$.

Si $m_{i,j} = 4$, on peut supposer que $A_{i,j} = -2$ et $A_{j,i} = -1$, et on doit vérifier les quatre relations suivantes :

$$a_i(R_jR_i)a_j, \qquad a_j(R_iR_j)a_i, \qquad a_i(R_jR_iR_j)a_i \quad \text{et} \quad a_j(R_iR_jR_i)a_j.$$

Comme R_i et R_j sont symétriques, la première relation est conséquence de la deuxième ; il suffit donc de démontrer les trois dernières. Posons $b = 2a_i + a_j$ et $c = a_i + a_j$. On constate que $a_jR_icR_ja_i$, $a_iR_jcR_icR_ja_i$ et $a_jR_ibR_jbR_ia_j$; cela établit les trois dernières relations.

Si $m_{i,j} = 6$, on peut supposer que $A_{i,j} = -3$ et $A_{j,i} = -1$, et il suffit, puisque R_i et R_j sont symétriques, de vérifier les six relations suivantes :

$$a_i(R_jR_i)a_j, \qquad a_i(R_jR_iR_j)a_i, \qquad a_j(R_iR_jR_i)a_j, \qquad a_i(R_jR_iR_jR_i)a_j,$$
$$a_i(R_jR_iR_jR_iR_j)a_i \quad \text{et} \quad a_j(R_iR_jR_iR_jR_i)a_j.$$

Posons $b = 3a_i + a_j$, $c = 2a_i + a_j$, $d = 3a_i + 2a_j$ et $e = a_i + a_j$. On constate que $a_iR_jeR_ia_j$, $a_iR_jeR_ieR_ja_i$, $a_jR_ibR_jbR_ia_j$ (et aussi $a_jR_icR_jcR_ia_j$), $a_iR_jeR_icR_jcR_ia_j$, $a_iR_jeR_icR_jcR_ieR_ja_i$ et $a_jR_ibR_jdR_idR_jbR_ia_j$, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

(5.3.5) Une autre façon de démontrer la fidélité des représentations de Digne dans le cas où Γ est de type B_n, F_4 ou G_2 est d'utiliser un théorème général d'Anatole Castella, voir [Ca, théorème 11.3.4 et corollaire 11.3.5].

Références

[Bi] S. Bigelow, Braid groups are linear, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001) 471–486.

[BH] B. Brink, R.B. Howlett, A finiteness property and an automatic structure for Coxeter groups, Math. Ann. 296 (1993) 179–190.

[Bo] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V, VI, Masson, Paris, 1981.

[BS] E. Brieskorn, K. Saito, Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen, Invent. Math. 17 (1972) 245–271.

[Ca] A. Castella, Automorphismes et admissibilité dans les groupes de Coxeter et les monoïdes d'Artin–Tits, Thèse, Orsay, 2006.

[Cr] J. Crisp, Injective maps between Artin groups, in: J. Cossey, et al. (Eds.), Geometric Group Theory Down Under, Proceedings of a Special Year in Geometric Group Theory, Canberra, Australia, July 14–19, 1996, de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 119–137.

[CW] A.M. Cohen, D.B. Wales, Linearity of Artin groups of finite type, Israel J. Math. 131 (2002) 101–123.

[De] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, Invent. Math. 17 (1972) 273–302.

[Di] F. Digne, On the linearity of Artin braid groups, J. Algebra 268 (2003) 39–57.

[G] F.A. Garside, The braid group and other groups, Q. J. Math. Oxford (2) 20 (1969) 235–254.

[K1] D. Krammer, The braid group B_4 is linear, Invent. Math. 142 (2000) 451–486.

[K2] D. Krammer, Braid groups are linear, Ann. of Math. 155 (2002) 131–156.

[L] R.J. Lawrence, Homological representations of the Hecke algebra, Comm. Math. Phys. 135 (1990) 141–191.

[Mi] J. Michel, A note on words in braid monoids, J. Algebra 215 (1999) 366–377.

[Mü] B. Mühlherr, Coxeter groups in Coxeter groups, in: Finite Geom. and Combinatorics, Cambridge University Press, 1993, pp. 277–287.

[P] L. Paris, Artin monoids inject in their groups, Comment. Math. Helv. 77 (2002) 609–637.